Početní část 1 - 21.6.2022

1. Uvažme 2π-periodickou funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanou pro $x \in (-\pi, \pi]$ předpisem $f(x) = (x - \frac{\pi}{2})^2$.

   (a) Rozviňte f v trigonometrickou Fourierovu řadu s periodou 2π.

   (b) Vyšetřete bodovou a (lokálně) stejnoměrnou konverganci této řady.

   (c) Dokažte (napríklad pomocí Parsevalovy rovnosti), že

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^2}{90}.$$

   Můžete využít známou řadu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

   (10 bodů)

   Řešení:

   Nejdříve spočítáme

   $$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} (x - \tfrac{\pi}{2})^2 \sin nx \; dx \\ &= \left[-\frac{(x - \frac{\pi}{2})^2 \cos nx}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{n} \int_{-\pi}^{\pi} (x - \tfrac{\pi}{2}) \cos nx \; dx \\ &= \frac{(-1)^{n+1} 2\pi^2}{n} + \left[\frac{2(x - \frac{\pi}{2}) \sin nx}{n^2} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n^2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx \\ &= \frac{(-1)^{n+1} 2\pi^2}{n}.\end{aligned}$$

   analogicky pro $n \neq 0$

   $$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{(-1)^n 4\pi}{n^2}$$

   a nakonec

   $$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \left[\frac{(x - \frac{\pi}{2})^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{7\pi^3}{6}.$$

   Celkově tedy dostáváme Fourierovu řadu ve tvaru

   $$\begin{aligned}f(x) &\sim \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{7\pi^3}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \left(\frac{(-1)^{n+1} 2\pi^2}{n} \sin nx + \frac{(-1)^n 4\pi}{n^2} \cos nx \right) \\ &= \frac{7\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1} 2\pi}{n} \sin nx + \frac{(-1)^n 4}{n^2} \cos nx \right)\end{aligned}$$

Funkce f je po částech hladká a jediné body nespojitosti jsou $\pi + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, řada tedy konverguje bodově k $f(x)$ na intervalech $(-\pi, \pi) + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, a na těchto intervalech konverguje i lokálně stejnoměrně. V bodech $\pi + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, konverguje k průměru jednostranných limit, tedy k hodnotě $\frac{5}{4}\pi^2$.

Parsevalova rovnost nám dává

$$\frac{61}{40}\pi^4 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{7\pi^2}{6}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{(-1)^{n+1}2\pi}{n}\right)^2 + \left(\frac{(-1)^n 4}{n^2}\right)^2\right)$$

Což po úpravě dává

$$\frac{61}{40}\pi^4 = \frac{49\pi^4}{72} + 4\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} + 16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

odkud už "snadno" dopočítáme hledaný součet.

2. Uvažme funkci $f(z) = \dfrac{3z^2 - z + 6}{z^3 - 3z^2 + z - 3}$.

   (a) Nalezněte maximální mezikruží se středem v bodě i obsahující bod $-2i$ na kterém je f holomorfní.

   (b) Na tomto mezikruží spočtěte Laurentovu řadu funkce f.

   (8 bodů)

Řešení: Standardním postupem spočítáme

$$\frac{3z^2 - z + 6}{z^3 - 3z^2 + z - 3} = \frac{3z^2 - z + 6}{(z-3)(z-i)(z+i)} = \frac{3}{z-3} + \frac{i}{2(z-i)} - \frac{i}{2(z+i)}.$$

Odtud snadno vidíme, že f má pól násobnosti 1 v bodech $\pm i$ a 3. Maximální mezikruží se středem i, na kterých je f holomorfní jsou tedy $U(i,0,2)$, $U(i,2,\sqrt{10})$ a $U(i,\sqrt{10},\infty)$. Bod $-2i$ je obsažen v $U(i,2,\sqrt{10})$. Potřebujeme tedy spočítat postupně následující Laurentovy řady:

1. funkce $\frac{i}{2(z-i)}$ na $U(i,0,\infty)$, což je přímo $\frac{i}{2(z-i)}$,
2. funkce $\frac{i}{2(z-i)}$ na $U(i,2,\infty)$, což spočítáme jako

$$-\frac{i}{2(z+i)} = -\frac{i}{2}\frac{1}{z+i-i+i} = -\frac{i}{2(z-i)}\frac{1}{1+\frac{2i}{z-i}} = -\frac{i}{2(z-i)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2i}{z-i}\right)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4}(-2i)^{n+1}\left(\frac{1}{z-i}\right)^{n+1} = \sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{1}{4}\left(\frac{i}{2}\right)^k (z-i)^k.$$

3. funkce $\frac{3}{z-3}$ na $U(i,0,\sqrt{10})$, což spočítáme jako

$$\frac{3}{z-3} = \frac{3}{z-3-i+i} = \frac{3}{i-3}\frac{1}{1+\frac{z-i}{i-3}} = \frac{3}{i-3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-i}{i-3}\right)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} -3\left(\frac{1}{3-i}\right)^{n+1}(z-i)^n.$$

Hlavní část Laurentovy řady f se středem v i na $U(i,2,\sqrt{10})$ má tedy tvar

$$\sum_{k=-\infty}^{-2}\frac{1}{4}\left(\frac{i}{2}\right)^n (z-i)^n,$$

regulární část pak tvar

$$\sum_{n=0}^{\infty} -3\left(\frac{1}{3-i}\right)^{n+1}(z-i)^n.$$